Zeszyty Naukowe PWSZ, Nowy Sącz 2013

Konštrukcie magických obdĺžnikov

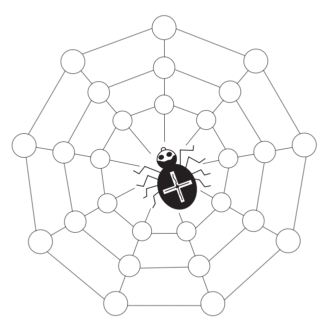
Marián Trenkler

Faculty of Education, Catholic University in Ružomberok
Hrabovská cesta 1, 034 01 Ružomberok, Slovakia
e-mail: marian.trenkler@ku.sk

Abstract
A magic rectangle is a generalization of semimagic square. In this paper some constructions of magic rectangles are presented.

Abstrakt
Magické obdĺžniky sú zovšeobecnením semimagických štvorcov. V práci sú uvedené niektoré originálne metódy konštrukcií magických obdĺžnikov.

Na obrázku 1 je nakreslená sieť pavúka pozostávajúca z troch deväťuholníkov a deviatich lúčovito usporiadaných vlákien, ktoré sa pretínajú v 27 bodoch. V týchto bodoch je nakreslených 27 krúžkov (kvapiek rosy).



Obr. 1

Úloha 1. Do krúžkov na obrázku 1 vpíšte čísla $1, 2, 3, \ldots, 27$ tak, aby súčty čísel po obvodoch všetkých 9-uholníkov boli rovnaké a zároveň aj súčty na každom vlákne boli rovnaké.

Práca vznikla vrámci projektu KEGA č. 003KU-4/2013.

Takáto úloha (matematický hlavolam) sa zvyčajne rieši skusmo a dnes môžeme do riešenia zapojiť aj výpočtovú techniku. Ťažko by sme riešili podobnú úlohu, ak by sieť pozostávala zo 100 dvestouholníkov.

Riešenie. Na obrázku 2 je tabuľka, ktorá pozostáva z troch riadkov a deviatich stĺpcov. Súčet čísel v každom riadku aj stĺpci je rovnaký. Ak do jednotlivých krúžkov siete pavúka vpíšeme príslušné čísla, tak dostaneme riešenie úlohy 1. Ako vznikla táto tabuľka sa dozviete neskôr.

4	18	20	13	27	2	22	9	11
21	5	16	3	14	25	12	23	7
17	19	6	26	1	15	8	10	24

Obr. 2

Úlohu 1 môžeme zovšeobecniť. Nech sieť pavúka pozostáva z m kružníc a n lúčovitých vlákien. Takúto sieť budeme označovať $\mathcal{S}(m,n)$. Symbolom $\mathcal{T}(m,n)$ budeme označovať obdĺžnik, ktorý sa skladá z $m.n$ buniek usporiadaných do m riadkov a n stĺpcov.

Úloha 2. Do krúžkov siete $\mathcal{S}(m,n)$ vpíšte všetky prirodzené čísla z množiny $\{1,2,\dots,m.n\}$ tak, aby súčty čísel po obvodoch m-uholníkov boli rovnaké a aj súčty na všetkých vláknach boli rovnaké.

Sieť pavúka, ktorá sa dá takto ohodnotiť, nazývame *magická sieť* a toto ohodnotenie nazývame *magické.* V tejto práci sa budeme zaoberať niektorými dvojicami parametrov m a n, pre ktoré Úloha 2 má, respektíve nemá riešenie.

Definícia. *Magický obdĺžnik* $\mathbf{M}_{m,n}$ rádu m,n je obdĺžnik $\mathcal{T}(m,n)$, do buniek ktorého sú vpísané všetky prirodzené čísla z množiny $\{1,2,\dots,m.n\}$, pričom súčty čísel v každom riadku sú rovnaké a aj súčty v každom stĺpci sú rovnaké.

Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $m \le n$. Z definície bezprostredne vyplýva, že existuje $\mathbf{M}_{1,1}$ a neexistuje $\mathbf{M}_{1,n}$ pre žiadne $n \ge 2$.

Magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{m,n}$ je vytvorený z $m.n$ buniek, ktoré označujeme $\mathbf{m}(i,j)$ pre $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Ak $m = n$ a navyše aj súčty čísel na oboch diagonálach sú rovnaké, tak magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{m,m}$ nazývame *magický štvorec* rádu m. Na internete (a aj mnohých článkoch, pozri napr. [1], [2]) sú uvedené konštrukcie magických štvorcov rádu m pre všetky prirodzené čísla $m \neq 2$. Z existencie $\mathbf{M}_{m,m}$ vyplýva magické ohodnotenie siete $\mathcal{S}(m,m)$.

Súčet všetkých čísel magického obdĺžnika $\mathbf{M}_{m,n}$ je

$$\tau = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{m}(i,j) = \frac{mn(mn+1)}{2}.$$

Súčet všetkých čísel v každom riadku $\mathbf{M}_{m,n}$ je $\rho = \frac{n(mn+1)}{2}$ a súčet čísel v každom stĺpci je $\sigma = \frac{m(mn+1)}{2}$.

Veta 1. Ak jedno z čísel m, n je párne a súčasne druhé nepárne, tak neexistuje $\mathbf{M}_{m,n}$.

Dôkaz. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že m je párne číslo a n nepárne. Súčin $n(m.n+1)$ je nepárne číslo a preto σ nie je celé číslo. Toto nie je možné, lebo σ je súčet celých čísel. $\square$

Veta 2. Magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{2,2k}$ existuje pre všetky $k \geq 2$.

Dôkaz vety urobíme popisom konštrukcie príslušného magického obdĺžnika $\mathbf{M}_{2,2k}$. Do prvého riadku tabuľky $\mathcal{T}(2,2k)$ vpíšeme postupne čísla $1, 2, 3, 4, \ldots, 2k$ a do druhého riadku $4k, (4k-1), (4k-2), \ldots, (2k+1)$. Súčty čísel v každom stĺpci (ale nie v riadkoch) budú rovnaké. Diferencie dvojíc čísel v jednotlivých stĺpcoch sú

$$\{(4k-1), (4k-3), \ldots, 11, 9, 7, 5, 3, 1\}$$

a ich súčet je $4k^2$. Ak vymeníme dvojicu čísel v j-tom stĺpci, tak príslušná diferencia zmení znamienko a súčet sa zmenší. Musíme ukázať, že môžeme priradiť znamienka diferencií tak, že ich súčet bude 0. Rozlíšime dva prípady:

Ak k je párne číslo, tak rovnaké súčty v riadkoch dosiahneme tak, že v stĺpcoch $2, 3, 6, 7, \ldots, 2k-2, 2k-1$ (t.j. v stĺpcoch, v ktorých $2k$ po delení štyrmi dáva zvyšok 2 alebo 3) navzájom vymeníme obe čísla v príslušnom stĺpci.

Ak k je nepárne číslo, tak postupujeme podobne ako predtým, len s tým rozdielom, že v poslednej šestici stĺpcov vymeníme navzájom čísla v prvom a aj treťom stĺpci. Príslušné diferencie sú $\{-11, 9, -7, 5, 3, 1\}$ a ich súčet je 0. $\square$

1	6	7	4
8	3	2	5

12	2	10	4	5	6
1	11	3	9	8	7

1	19	18	4	16	6	14	8	9	10
20	2	3	17	5	15	7	13	12	11

Obr. 3. Magické obdĺžniky $\mathbf{M}_{2,4}$, $\mathbf{M}_{2,6}$, $\mathbf{M}_{2,10}$

Veta 3. Magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{m,n}$ existuje pre všetky párne čísla $m, n > 2$.

Dôkaz urobíme popisom konštrukcie príslušného magického obdĺžnika. Konštrukciu urobíme matematickou indukciou. Prvý krok, konštrukcia $\mathbf{M}_{n,2}$ je popísaná v dôkaze predchádzajúcej vety.

Pretože $n \geq m > 2$ môžeme predpokladať, že už sme zostrojili $\mathbf{M}_{m-2,n}$. Doplnením dvoch riadkov z tohto obdĺžnika vytvoríme $\mathbf{M}_{m,n}$.

Ku každému prvku $\mathbf{M}_{m-2,n}$ pripočítame číslo $2n$. K tejto tabuľke doplníme dva riadky $\mathbf{M}_{2,n}$, pričom ku všetkým jej prvkom väčším ako n pripočítame $n(m+1)$. $\square$

Tento postup je demonštrovaný v nasledujúcej tabuľke na obrázku 4 pre $\mathbf{M}_{4,10}$.

11	29	28	14	26	25	17	18	19	21
30	12	13	29	15	16	24	23	22	20
1	39	38	4	36	35	7	8	9	31
40	2	3	37	5	6	34	33	32	10

Obr. 4. Magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{4,10}$

Poznámka. Ak m aj n sú čísla deliteľné štyrmi bez zvyšku, tak magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{m,n}$ môžeme zostrojiť nasledujúcim spôsobom. (Táto konštrukcia je zovšeobecnením známej metódy pre vytváranie magických štvorcov rádu, ktorý je deliteľný štyrmi.)

Konštrukcia vychádza z tabuľky $\mathcal{T}(m,n)$. Táto je súmerná podľa dvoch osí, ktoré pretínajú stredy protiľahlých strán. V prvom kvadrante $\mathcal{T}(m,n)$ vytvoríme šachovnicu, ktorá rozdelí jednotlivé políčka na biele a čierne. Políčka v ostatných kvadrantoch zafarbíme tak, aby ofarbenie bolo súmerné podľa oboch osí. V druhom kroku do tabuľky postupne napíšeme čísla $1, 2, 3, \ldots, m.n$. Na záver navzájom vymeníme všetky dvojice čísel, ktoré sa nachádzajú v políčkach čiernej farby a sú súmerne podľa stredu.

Na nasledujúcej tabuľke obrázku 5 je magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{4,8}$.

1	31	3	29	28	6	26	8
24	10	22	12	13	19	15	17
16	18	14	20	21	11	23	9
25	7	27	5	5	30	2	32

OBR. 5. Magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{4,8}$

Veta 4. Ak a, b sú prirodzené čísla a $n = a.b > 2$, tak existuje magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{an,bn}$.

Dôkaz. Ak $a = 1$ najskôr zostrojíme $\mathcal{T}(n, n^2)$, ktorý sa skladá z n tabuliek $\mathcal{T}_i(n, n)$, $i = 1, 2, \ldots n$. Magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{n,n^2}$ urobíme z $\mathcal{T}(n, n^2)$ v dvoch krokoch.

1. Do jednotlivých štvorčekov $\mathcal{T}_i(n, n)$, pre všetky $1 \leq i \leq n$, vpíšeme čísla z množiny $R = \{0, n^2, 2n^2, 3n^2, 4n^2, \ldots, (n-1)n^2\}$ tak, aby každé z čísel z R sa nachádzalo v každom riadku a stĺpci práve raz a v žiadnych dvoch štvorcových tabuľkách na tom istom mieste neboli rovnaké čísla. Toto je možné urobiť tak, že do prvého riadku $\mathcal{T}_1(n, n)$ vpíšeme postupne $0, n^2, \ldots, (n-1)n^2$ a v nasledujúcom riadku ich cyklicky posunieme o jedno doprava. Takto vyplníme $\mathcal{T}_1(n, n)$. Do prvého riadku $\mathcal{T}_2(n, n)$ opíšeme posledný riadok z $\mathcal{T}_1(n, n)$ a postupujeme ako vyššie.

2. Do štvorčeka v s-tom riadku a t-tom stĺpci $\mathcal{T}_i(n, n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, vpíšeme číslo, ktoré je v s-tom riadku a t-tom stĺpci v $\mathbf{M}_{n,n}$.

Ak sčítame čísla priradené v oboch krokoch, dostaneme magické ohodnotenie $\mathcal{T}(n, n^2)$. (Na obrázku 6 je ukázaná konštrukcia $\mathbf{M}_{3,9}$, pričom sme zvolili $n = 3$, $a = 1$, $b = 3$. Zostrojený magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{3,9}$ je nakreslený na obrázku 2.)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

0	9	18	9	18	0	18	0	9
18	0	9	0	9	18	9	18	0
9	18	0	18	0	9	0	9	18

OBR. 6. Konštrukcia $\mathbf{M}_{3,9}$

Ak $a > 1$, tak rozdelíme $\mathbf{M}_{n,n^2}$ na a obdĺžnikov pozostávajúcich z n riadkov a bn stĺpcov a tieto vložíme do $\mathcal{T}(an, bn)$. $\square$

Veta 5. Ak $\mathbf{M}^1_{m,n}$ a $\mathbf{M}^2_{p,q}$ sú magické obdĺžniky, tak existuje magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{r,s}$, kde $r = m.p$ a $s = n.q$.

Dôkaz. Zostrojíme tabuľku $\mathcal{T}(r, s)$, ktorá sa skladá z $p.q$ zhodných tabuliek $\mathcal{T}_{i,j}(m, n)$, kde $1 \leq i \leq p$ a $1 \leq j \leq q$. Konštrukciu magického ohodnotenia urobíme v dvoch krokoch.

1. Do každého štvorčeka $\mathcal{T}_{i,j}(m, n)$ vpíšeme číslo $(\mathbf{m}^2(i, j) - 1)m.n$ pre všetky i, j. Symbolom $\mathbf{m}^1(i, j)$, resp. $\mathbf{m}^2(i, j)$ označujeme prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci $\mathbf{M}^1_{m,n}$, respektíve $\mathbf{M}^2_{p,q}$. Súčet vpísaných čísel je rovnaký v každom riadku aj stĺpci.

2. Do štvorčeka v s-tom riadku a t-tom stĺpci tabuľky $\mathcal{T}_{i,j}(m, n)$ pre všetky $1 \leq i \leq p$ a $1 \leq j \leq q$, vpíšeme číslo z $\mathbf{m}^1(s, t)$ pre všetky dvojice s, t.

Ak sčítame čísla, ktoré sme priradili jednotlivým štvorčekom v oboch krokoch, tak dostaneme $\mathbf{M}_{r,s}$. $\square$

Na obrázku 7 je ukázané, ako sa použitím dvojice magických obdĺžnikov $\mathbf{M}_{2,4}$ a $\mathbf{M}_{3,3}$ vytvorí magický obdĺžnik $\mathbf{M}_{6,12}$.

1	7	6	4
8	2	3	5

$\mathbf{M}_{2,4}$

8	1	6
3	5	7
4	9	2

$\mathbf{M}_{3,3}$

57	63	62	60	1	7	6	4	41	47	46	44
64	58	59	61	8	2	3	5	48	42	43	45
17	23	22	20	33	39	38	36	49	55	54	52
24	18	19	21	40	34	35	37	56	50	51	53
25	31	30	28	65	71	70	68	9	15	14	12
32	26	27	29	72	66	67	69	16	10	11	13

Obr. 7. Konštrukcia $\mathbf{M}_{6,12}$

Poznámka. V jednotlivých dôkazoch sme popisovali konštrukcie príslušných magických obdĺžnikov a overenie správnosti sme ponechali na čitateľa. Podobne, ako skúška správnosti patrí k riešeniu úlohy, patrí k dôkazu matematického tvrdenia aj dôkaz správnosti konštrukcie.

Z uvedených viet vyplýva konštrukcia $\mathbf{M}_{m,n}$ pre mnoho dvojíc parametrov m, n, ale existuje aj mnoho iných dvojíc, o ktorých nevieme rozhodnúť, či existuje $\mathbf{M}_{m,n}$. Na obrázku 8 sú uvedené $\mathbf{M}_{3,5}$ a $\mathbf{M}_{3,7}$. Iste ste si všimli, že riešením úlohy 1 je $\mathbf{M}_{3,9}$.

1	10	14	9	6
15	2	7	11	5
8	12	3	4	13

1	12	20	8	13	6	17
14	2	10	21	5	16	9
18	19	3	4	15	11	7

Obr. 8. Magické obdĺžniky $\mathbf{M}_{3,5}$ a $\mathbf{M}_{3,7}$

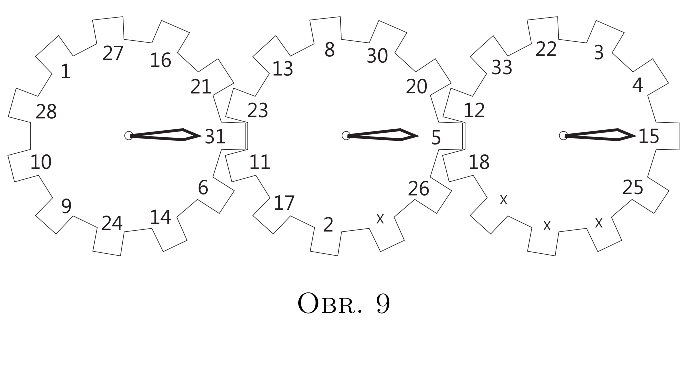
Úloha 3. Zostrojte $\mathbf{M}_{3,n}$ pre niektoré ďalšie hodnoty parametra $n \geq 11$.

Bez dôkazu, ktorý presahuje rámec tohto príspevku uvádzame, že pre všetky nepárne $n \geq 3$ existuje $\mathbf{M}_{3,n}$.

Nakoniec uvedieme niekoľko úloh, pri riešení ktorých môžete využiť získané poznatky. Použitím uvedených magických obdĺžnikov môžete pomôcť rozprávkovým hodinárom a sformulovať aj ďalšie variácie uvedených úloh.

Úloha 4. Použitím magického štvorca rádu n dokážte, že pre všetky párne $n \geq 4$ existuje $\mathbf{M}_{n,2n}$.

Úloha 5. V zakliatej krajine Šípkovej Ruženky sa zastavil čas. Hodinári zostrojili hodiny s troma rôznymi otáčajúcimi sa ciferníkmi (pozri obrázok 9), ktoré síce fungovali, ale ukazovali stále tú istú hodinu **51**, ktorá bola súčtom čísel (na ktoré ukazovali pevné ručičky) na troch ciferníkov. Zlý Rumburak v noci zmazal niektoré čísla a napísal na ich miesta **x**. Doplňte zmazané čísla, ak viete, že na ciferníkoch boli všetky prirodzené čísla z množiny $\{1, 2, \ldots, 33\}$?



Obr. 9

Úloha 6. Zlepšovatelia upravili hodiny (nahradili všetky ciferníky novými ciferníkmi) z úlohy 5 tak, že stále ukazovali **33** hodín. Viete, akú úpravu ciferníkov urobili?

Úloha 7. Hodinári postupne upravovali hodiny výmenami ciferníkov. Viete aké časy mohli ukazovať ich hodiny?

Literatúra

[1] Semanišinová I. *Pravidelnosti a symetrie pri konštrukciách magických štvorcov*, MFI **9/21**, 2011/2012, 523–532.

[2] Trenkler M. *Konštrukcia magických p-rozmerných kociek*, Obzory matematiky, fyziky a informatiky **2/29**, 2000, 19–29.